Esercizi per il corso di Istituzioni di Matematica II

Scienze Ambientali – Ravenna – Prof. A. Bonfiglioli

► **Esercizio** 1 (**Stabilità per sistemi lineari**). Si discuta la stabilità dell'origine $(0,0)$ per i seguenti sistemi di EDO lineari 2×2:

$$(1):\quad \begin{cases} \dot{x} = -3\,x - 5\,y \\ \dot{y} = 5\,x + 3\,y \end{cases} \qquad (2):\quad \begin{cases} \dot{x} = 2\,x - 5\,y \\ \dot{y} = 5\,x + 2\,y \end{cases}$$

$$(3):\quad \begin{cases} \dot{x} = -x - 3\,y \\ \dot{y} = 3\,x - y \end{cases} \qquad (4):\quad \begin{cases} \dot{x} = 6\,y \\ \dot{y} = -6\,x \end{cases}$$

$$(5):\quad \begin{cases} \dot{x} = 2\,x - 3\,y \\ \dot{y} = 2\,y \end{cases} \qquad (6):\quad \begin{cases} \dot{x} = -6\,x + 6\,y \\ \dot{y} = -6\,y \end{cases}$$

$$(7):\quad \begin{cases} \dot{x} = 2\,x - 3\,y \\ \dot{y} = 3\,x + 2\,y \end{cases} \qquad (8):\quad \begin{cases} \dot{x} = x + 2\,y \\ \dot{y} = -x + 4\,y \end{cases}$$

$$(9):\quad \begin{cases} \dot{x} = 4\,x - 4\,y \\ \dot{y} = 2\,x - 2\,y \end{cases} \qquad (10):\quad \begin{cases} \dot{x} = 4\,x - 6\,y \\ \dot{y} = 3\,x - 5\,y \end{cases}$$

$$(11):\quad \begin{cases} \dot{x} = -x - 2\,y \\ \dot{y} = x - 4\,y \end{cases} \qquad (12):\quad \begin{cases} \dot{x} = -2\,x - y \\ \dot{y} = x - 2\,y \end{cases}$$

$$(13):\quad \begin{cases} \dot{x} = -3\,x + 5\,y \\ \dot{y} = -2\,x + 3\,y \end{cases} \qquad (14):\quad \begin{cases} \dot{x} = -6\,x + 6\,y \\ \dot{y} = -3\,x + 3\,y \end{cases}$$

$$(15):\quad \begin{cases} \dot{x} = -3\,x \\ \dot{y} = -3\,y \end{cases} \qquad (16):\quad \begin{cases} \dot{x} = 10\,x \\ \dot{y} = 10\,y \end{cases}$$

1. $(0,0)$ è instabile (*autovalori reali distinti non nulli e discordi:* colle);
2. $(0,0)$ è instabile (*autovalori complessi coniugati con parte reale positiva:* fuoco instabile);
3. $(0,0)$ è asintoticamente stabile (*autovalori complessi coniugati con parte reale negativa:* fuoco stabile);
4. $(0,0)$ è neutralmente stabile (*autovalori complessi coniugati con parte reale nulla:* centro);
5. $(0,0)$ è instabile (*autovalori reali uguali e positivi, matrice non multipla della identità:* nodo instabile);
6. $(0,0)$ è asintoticamente stabile (*autovalori reali uguali e negativi, matrice non multipla della identità:* nodo stabile);
7. $(0,0)$ è instabile (*autovalori complessi coniugati con parte reale positiva:* fuoco instabile);
8. $(0,0)$ è instabile (*autovalori reali distinti positivi:* nodo instabile);
9. $(0,0)$ è instabile (*autovalori reali distinti, uno nullo e uno positivo:* fascio instabile);
10. $(0,0)$ è instabile (*autovalori reali distinti non nulli e discordi:* colle);
11. $(0,0)$ è asintoticamente stabile (*autovalori reali distinti negativi:* nodo stabile);
12. $(0,0)$ è asintoticamente stabile (*autovalori complessi coniugati con parte reale negativa:* fuoco stabile);
13. $(0,0)$ è neutralmente stabile (*autovalori complessi coniugati con parte reale nulla:* centro);
14. $(0,0)$ è neutralmente stabile (*autovalori reali distinti, uno nullo e uno negativo:* fascio neutralmente stabile);
15. $(0,0)$ è asintoticamente stabile (*autovalori reali uguali e negativi, matrice multipla della identità:* stella stabile);
16. $(0,0)$ è instabile (*autovalori reali uguali e positivi, matrice multipla della identità:* stella instabile).

► **Esercizio** 2 (**Stabilità per sistemi non-lineari**). Dopo aver mostrato che il punto $(x_0, y_0) = (0,0)$ è un punto di equilibrio per il sistema non-lineare 2×2 di EDO

$$\begin{cases} \dot{x} = -4\,e^y + 2\log(1+x) + 2\,(\cos y)^3 + x^2\,e^x \\ \dot{y} = 2\,\sin y - 4\,x + y^3 - 2\cos x + 2, \end{cases}$$

classificarne, se possibile, la stabilità.

Soluzione: Matrice Jacobiana in $(0,0)$: $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$; autovalori 6 e -2 (nessun autovalore è nullo dunque si può applicare il teorema di linearizzazione, che tuttavia potrebbe non dare informazioni): punto instabile.

Ripetere lo stesso tipo di esercizio per i casi seguenti (il punto (x_0, y_0) è assegnato in ciascuno dei casi e il sistema non lineare è scritto affianco).

$$(1): \qquad (x_0, y_0) = (0,0), \qquad \begin{cases} \dot{x} = -\sin x + y^2 \\ \dot{y} = x - 2\,\log(1+y) + x^4, \end{cases}$$

$$(2): \qquad (x_0, y_0) = (1,0), \qquad \begin{cases} \dot{x} = \sin(x-1) + e^y - 1 \\ \dot{y} = 2(x-1) + \sin(2y), \end{cases}$$

$$(3): \qquad (x_0, y_0) = (0,2), \qquad \begin{cases} \dot{x} = \cos x + 3\,\sin(y-2) - 1 \\ \dot{y} = 1 - e^x + (y-2)^2, \end{cases}$$

$$(4): \qquad (x_0, y_0) = (1,-1), \qquad \begin{cases} \dot{x} = -\log x - 2\,\mathrm{tg}\,(y+1) \\ \dot{y} = x + 3 + (x-1)^2 - 4\,e^{y+1}, \end{cases}$$

$$(5): \qquad (x_0, y_0) = (1,2), \qquad \begin{cases} \dot{x} = \sin(4x-4) - 6(y-2) \\ \dot{y} = 3\,\log(x) - 5\,e^{y-2} + 5, \end{cases}$$

$$(6): \qquad (x_0, y_0) = (-2,0), \qquad \begin{cases} \dot{x} = 2\,\cos(x+2) - 3\,e^y + 1 \\ \dot{y} = 2\,y + y^2 + 3\,x + 6, \end{cases}$$

$$(7): \qquad (x_0, y_0) = (1,-1), \qquad \begin{cases} \dot{x} = -\log(x) - 2\,\sin(y+1) + (x-1)^2\,e^y \\ \dot{y} = x + y(x-1)^2 - 4\,e^{y+1} + (y+1)^5 + 3, \end{cases}$$

$$(8): \qquad (x_0, y_0) = (0,0), \qquad \begin{cases} \dot{x} = x + 2e^x - 2 + x^7 \\ \dot{y} = -\sin x + 4\,\log(y+1) + x^6 e^y, \end{cases}$$

Soluzioni:

1. Matrice Jacobiana in $(0,0)$: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; autovalori -1 e -2 (teorema applicabile): punto stabile.
2. Matrice Jacobiana in $(1,0)$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; autovalori 3 e 0: nessuna informazione poiché il teorema di linearizzazione non è applicabile.

3. Matrice Jacobiana in $(0,2)$: $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; autovalori $\pm i\sqrt{3}$: nessuna informazione (poichè (0,0) è neutralmente stabile per il sistema lineare associato).

4. Matrice Jacobiana in $(1,-1)$: $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$; autovalori -2 e -3 (teorema applicabile): punto stabile.

5. Matrice Jacobiana in $(1,2)$: $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$; autovalori 1 e -2 (teorema applicabile): punto instabile.

6. Matrice Jacobiana in $(-2,0)$: $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; autovalori $2 \pm 3\,i$ (teorema applicabile): punto instabile.

7. Matrice Jacobiana in $(1,-1)$: $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$; autovalori -3 e -2 (teorema applicabile): punto stabile.

8. Matrice Jacobiana in $(0,0)$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$; autovalori 3 e 2 (teorema applicabile): punto instabile.